Klasse BVKT1
3. Schulaufgabe aus der Mathematik
am 8.07.2014

Aufgabe 1

Gegeben ist die Funktion $f_k : x \mapsto \frac{4x^2 + k}{x^2 - 4}$ mit $k \in \mathbb{R}$ in ihrer maximalen Definitionsmenge D_{max}.

1.1 Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge D_{max}. [6]
Berechnen Sie den Wert von k, für den die Funktion f_k stetig fortsetzbare Definitionslücken besitzt. Geben Sie für diesen Fall den Funktionsterm f* in möglichst einfacher Form an und beschreiben Sie, wie der Graph von f* verläuft.

1.2 Bestimmen Sie Anzahl und Lage der Nullstellen von f_k in Abhängigkeit von k. [4]

Für alle folgenden Aufgaben gilt: $k = -9$. Die Funktion f_{-9} wird kurz mit f bezeichnet.

1.3 Geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten des Graphen von f und das Verhalten der Funktionswerte von f für $x \to \infty$ an. [3]

1.4 Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von G(f) mit den Koordinatenachsen. [6]
Zeichnen Sie mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse und geeigneter Funktionswerte den Graphen G(f) für $-6 \le x \le 6$ und die der Asymptoten in das vorhandene Koordinatensystem.

1.5 Gegeben ist weiterhin die reelle Funktion g_W mit $g_W(x) = w$ und $w \in \mathbb{R}$. [8]
Untersuchen Sie, für welche Werte von w die Geraden keine Schnittpunkte mit dem Graphen von f besitzt. Wie lautet demnach die Wertemenge W_f der Funktion f ?

Aufgabe 2

2.0 Gegeben ist die Funktion $g : x \mapsto \ln\left(\frac{4-x}{4+x}\right)$ mit ihrer maximalen Definitionsmenge D_g.

2.1 Zeigen Sie, dass gilt: $D_g =]-4; 4[$. Bestimmen Sie das Verhalten an den Rändern von D_g und geben Sie die Gleichungen sämtlicher Asymptoten an. [6]

2.2 Untersuchen Sie den Graphen von g auf Symmetrie. [4]

2.3 Berechnen Sie die Nullstelle von g und zeichnen Sie den Graph von g für $-4 < x < 4$ und seine Asymptoten in das vorhandene Koordinatensystem. [6]

Aufgabe 3

3.0 Herr K. hat von seinem üppigen Einkommen 10000 € angespart und möchte diesen Betrag langfristig anlegen. Die Zinsen werden am Ende eines Jahres zum Kapital dazugeschlagen. Sein Finanzberater bietet ihm zwei verschiedene Anlagemöglichkeiten an:
A: Der volle Betrag wird mit 3% jährlich verzinst.
B: Nach Abzug einer einmaligen Gebühr von 900 € beträgt der jährliche Zins 5%.

3.1 Geben Sie die Funktionsterme $A(t) = A_0 \cdot a^t$ bzw. $B(t) = B_0 \cdot b^t$ für das Vermögen mit eingesetzten Zahlenwerten an, wobei t die Zeit in Jahren ist. [4]
Berechnen Sie A(t) auch in der Form $A(t) = A_0 \cdot e^{ct}$.

3.2 Berechnen Sie, nach wie vielen Jahren sich das Startkapital bei Anlage A verdoppelt. [3]

3.3 Berechnen Sie, ab welcher Laufzeit die Variante B günstiger für Herrn K. ist. [5]

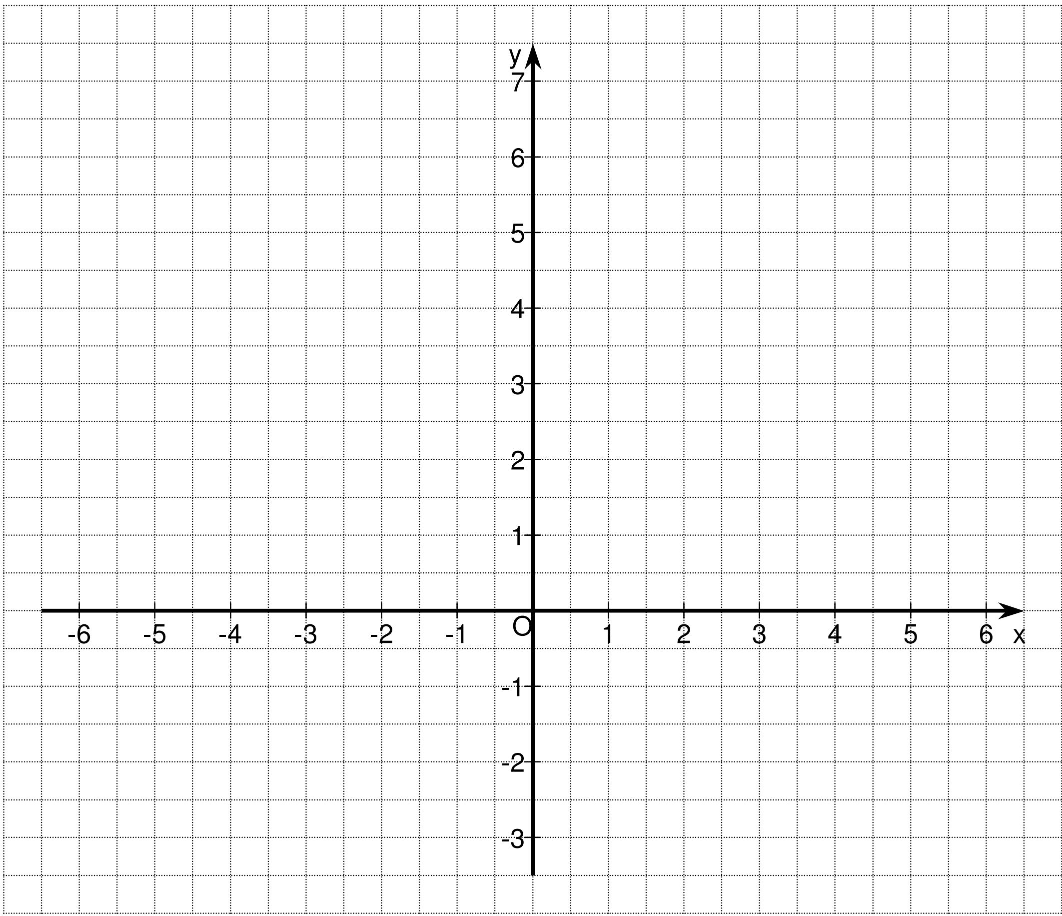
Klasse BVKT1
3. Schulaufgabe aus der Mathematik
am 8.07.2014

Name: ....

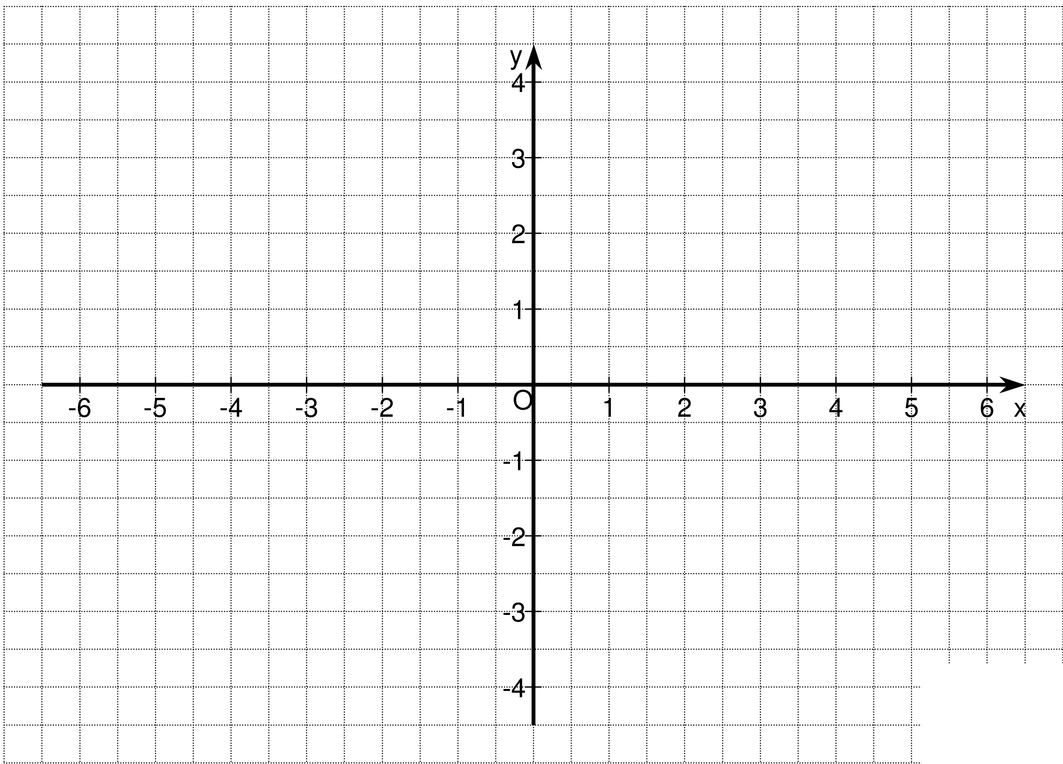
NP

1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	2.1	2.2	2.3	3.1	3.2	3.3	Σ

Zu Aufgabe 1



Zu Aufgabe 2



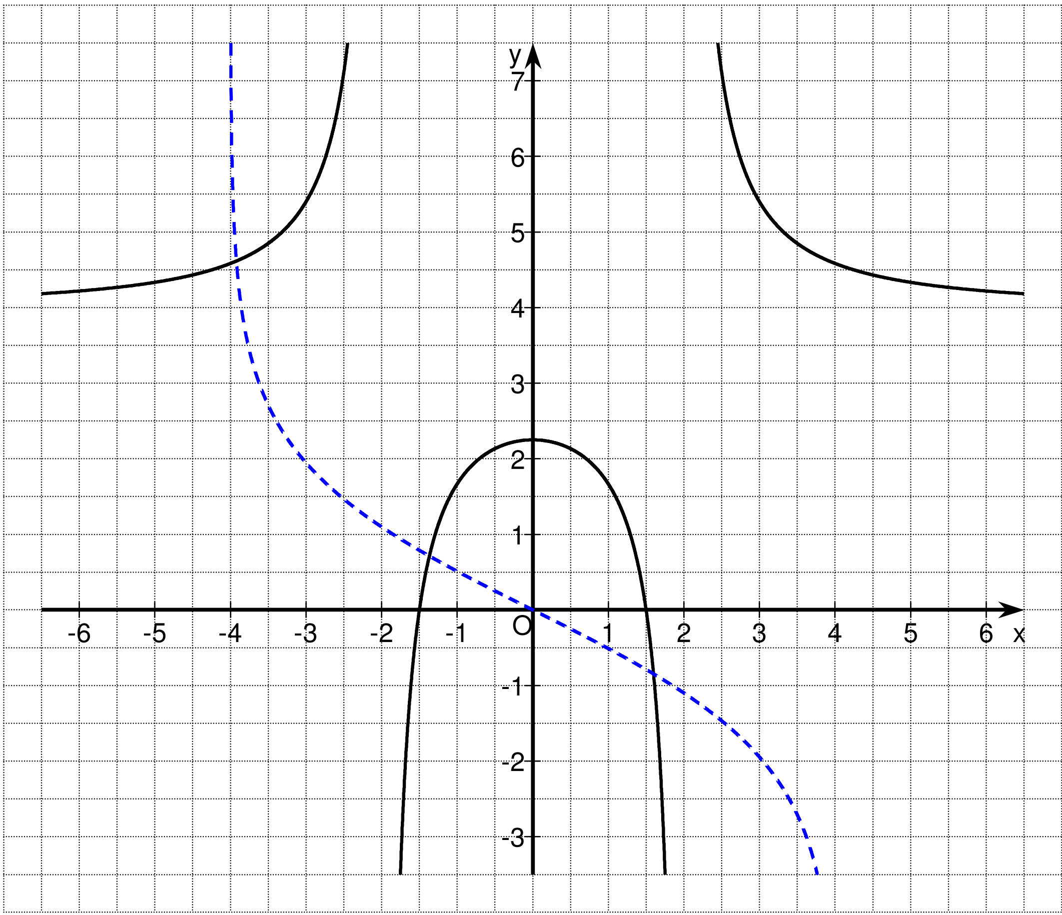
Klasse BVKT1
3. Schulaufgabe aus der Mathematik
am 8.07.2014

Name: ....

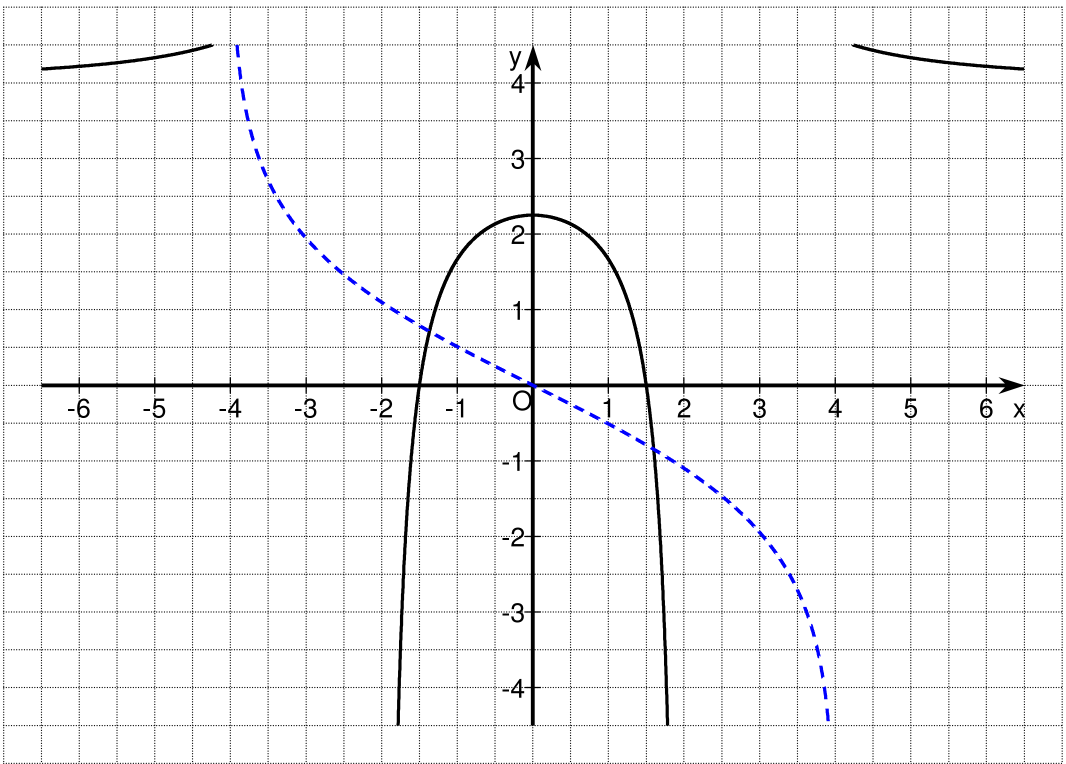
NP

1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	2.1	2.2	2.3	3.1	3.2	3.3	Σ

Zu Aufgabe 1



Zu Aufgabe 2



BVKT1 3. SA am 8.7.14

1.1 $x^2-4=0 \Rightarrow x_{1/2}=\pm 2 \Rightarrow D_{max}=\mathbb{R}\setminus\{-2;2\}$

$x_1=2$ in Z: $4\cdot 4+k=0 \Leftrightarrow k=-16$ (2 Lücken bei $x=\pm 2$)

$f^*(x)=\frac{4x^2-16}{x^2-4}=\frac{4(x^2-4)}{x^2-4}=4$: waagr Gerade m.

1.2 $4x^2+k=0 \Leftrightarrow x^2=-\frac{1}{4}k$ Bzw.! $D=0-4\cdot 4k=-16k$!

1.) $k>0$: k. NST

2.) $k=0$: eine NST $x_{1/2}=0$

3.) $k<0$: zwei NST $x_{1/2}=\pm\frac{1}{2}\sqrt{-k}$

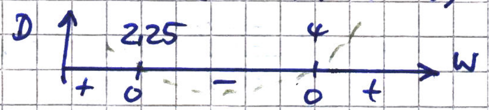
1.3 $x=-2$; $x=2$ (Senkr.);

Für $x\to\infty$: $f(x)\to 4 \Rightarrow y=4$ waagr. As.

1.4 $x_{1/2}=\pm\frac{1}{2}\sqrt{+9}=\pm\frac{3}{2}$; $N_1(-1{,}5/0)$; $N_2(1{,}5/0)$ $S_y(0/\frac{9}{4})$

1.5 $\frac{4x^2-9}{x^2-4}=w \Leftrightarrow 4x^2-9=wx^2-4w \Leftrightarrow (4-w)x^2+4w-9=0$

$D=0-4(4-w)(4w-9)=4(w-4)(4w-9)=0$



$w_1=4$ $w_2=9/4=2{,}25$

keine SP: $D<0$ für $w\in]2{,}25;4[\Rightarrow W_g=\mathbb{R}\setminus]\frac{9}{4};4]$

$w=4$: keine quadr. Gl.

2.1

		−4		4	
Z(x)	+	+	+	0	−
N(x)	−	0	+	+	+
Arg	−	↯	+	0	−

$\Rightarrow D_{max}=]-4;4[$

$x\to -4^{(+)}$: $Arg(x)\to +\infty \Rightarrow f(x)\to\infty$ $x=-4$

$x\to 4^{(-)}$: $Arg(x)\to 0 \Rightarrow f(x)\to -\infty$ $x=4$ } senk. As.

2.2 $f(-x)=\ln\left(\frac{4+x}{4-x}\right)=\ln\left(\left(\frac{4-x}{4+x}\right)^{-1}\right)=-\ln\left(\frac{4-x}{4+x}\right)=-f(x)$

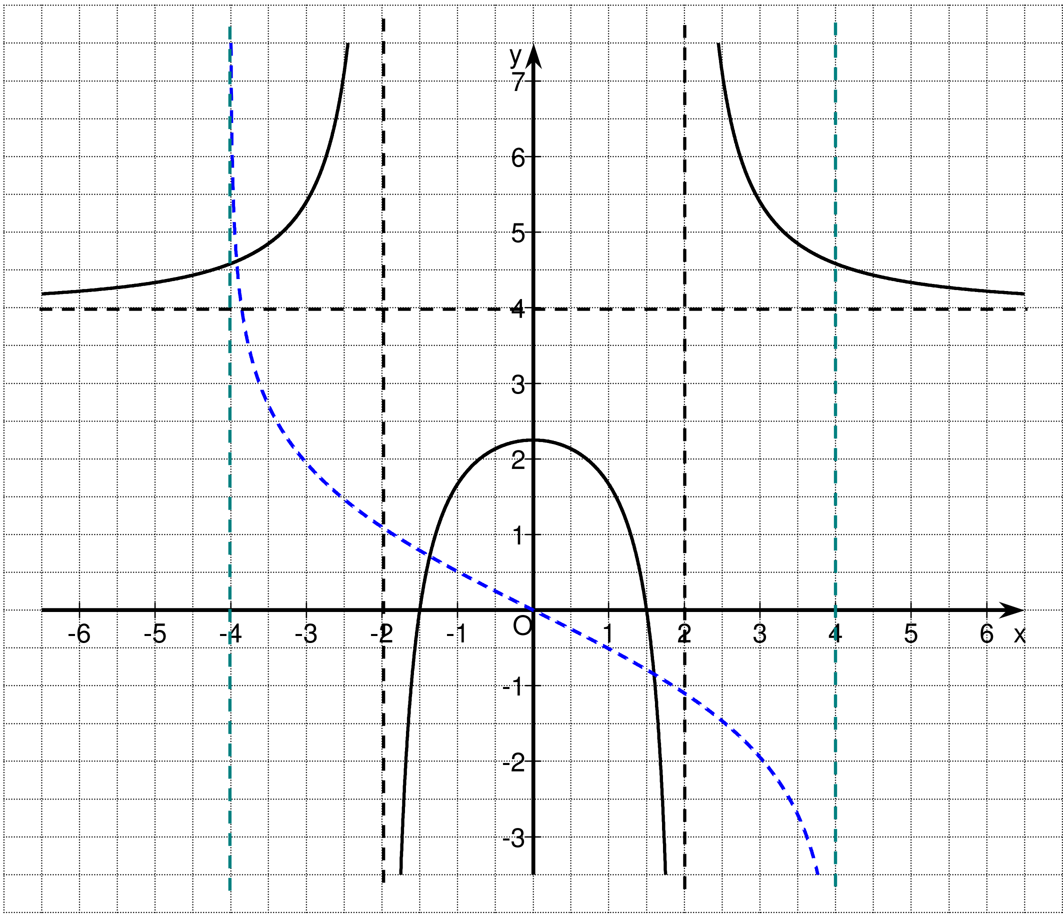
$D_{max}=]-4;4[$ sym. zum Urspr. $\Rightarrow$ P-sym z. Urs.

2.3 $\frac{4-x}{4+x}=1 \Leftrightarrow 4-x=4+x \Leftrightarrow 0=2x \Leftrightarrow x_N=0$

und G_g

3. Schulaufgabe BVKT1 am 8.7.2014

Aufgaben 1 und 2: Graphen



3.1 $A(t) = 10000 \cdot 1,03^t$; $B(t) = 9100 \cdot 1,05^t$

$A(t) = \tilde{A}_0 \cdot 1,03^t = \tilde{A}_0 \cdot e^{ct}$ | ln

$\Rightarrow \ln 1,03^t = \ln e^{ct} \Leftrightarrow t \cdot \ln(1,03) = ct$

$c = \ln(1,03)$ $(\approx 0,02956)$

3.2 $A(t) = 2 \cdot A_0 \Rightarrow A_0 \cdot 1,03^t = 2A_0 \Rightarrow \ln(1,03^t) = \ln(2)$

$t \cdot \ln(1,03) = \ln(2) \Rightarrow t = \frac{\ln(2)}{\ln(1,03)} \approx 23,45$

bzw.

$1.03^t = 2 \Leftrightarrow t = \log_{1,03}(2) \approx 23,45$ Nach 24 Jahren

3.3 $A(t) = B(t) \Rightarrow 10\,000 \cdot 1,03^t = 9100 \cdot 1,05^t$

$\Leftrightarrow \frac{1,03^t}{1,05^t} = \frac{9100}{10000} \Leftrightarrow \left(\frac{1,03}{1,05}\right)^t = 0,91$ | ln

$\Leftrightarrow t \cdot \ln\left(\frac{1,03}{1,05}\right) = \ln(0,91) \Leftrightarrow t = \frac{\ln(0,91)}{\ln\left(\frac{103}{105}\right)}$

$t \approx 4,90$; Nach 5 Jahren: B günstiger